**ÉCOLE DES PONTS PARIS TECH**
**RAPPORT ORAL DE MATHÉMATIQUES**
**Admission Sur Titre. L3**
**Année 2019**

L'oral se déroule en deux temps :
- dans un premier temps, une préparation de 15 minutes environ dans la salle d'interrogation ; il est proposé de résoudre un exercice portant sur une partie large du programme de mathématiques,
- dans un second temps, un passage au tableau durant 30 minutes environ, pendant lequel le candidat expose d'abord au jury son travail produit pendant la préparation. Ensuite, il lui est proposé de résoudre directement au tableau un second exercice portant sur une partie différente du programme de mathématiques du concours.

L'école des Ponts recrute des étudiants ayant un niveau L3 dans leur spécialité (maths ou physique) et un niveau L2 dans la spécialité complémentaire. Les questions posées sont de niveau L2 dans les deux spécialités ; certaines questions peuvent mettre en œuvre des connaissances de niveau L3.

Cet oral consiste en un dialogue entre le candidat et l'examinateur. Le rôle de ce dernier est d'évaluer les connaissances et les capacités du candidat en mathématiques, et en aucune façon d'essayer de lui donner un cours. Le but de cet oral n'est pas de résoudre en totalité les exercices proposés, mais de tester les connaissances et l'esprit d'initiative de chaque candidat.

Afin de juger de la performance des impétrants, l'examinateur prend en compte la compréhension du problème posé, les initiatives prises (cerner les difficultés, les nommer, donner des directions pour les surmonter, etc.), la capacité d'envisager différentes méthodes et à réfléchir à leurs utilisations, la connaissance précise du cours, ainsi que la rigueur et la qualité de l'expression orale.

Lors des oraux précédents, on constate principalement le manque d'autonomie des candidats. Le temps de préparation doit servir à dégager des idées (les plus précises possibles) qui permettront d'avancer lors du passage au tableau. De trop nombreux candidats se contentent d'exposer une vague idée puis se retournent vers l'examinateur pour l'interroger sur la démarche à suivre.
En particulier, l'énoncé des théorèmes utilisés reste encore très souvent imprécis : les hypothèses sont trop rarement vérifiées quand l'énoncé ne se réduit pas à une formule *magique*. Le raisonnement logique (condition nécessaire, condition suffisante...) est trop souvent insuffisant.

Rappelons enfin que ces épreuves orales du concours AST ont pour but d'admettre les candidats à l'École de Ponts et Chaussées ParisTech. Etre parmi les meilleurs de sa promotion ne suffira pas pour y réussir. L'oral de mathématiques est une épreuve particulière qu'il faut préparer tout au long de l'année en résolvant de nombreux exercices sur chacun des chapitre du programme.

## EXEMPLES D'EXERCICES PROPOSÉS LORS DES SESSIONS PRÉCÉDENTES

**Exercice 1.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On pose $P(X) = (X-1)^n - e^{2i\alpha}(X+1)^n$.
1. Déterminer les racines de $P$.
2. En déduire une expression de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \text{cotan}(\frac{\alpha + k\pi}{n})$.

**Exercice 2.**
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi$ une forme linéaire sur $E$.
1. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in E$ telle que pour tout $A \in E, \varphi(A) = \text{tr}(AB)$.
2. Déterminer la dimension des l'ensemble des matrices de $E$ de trace nulle.

**Exercice 3.**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

**Exercice 4.**
Soit $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$

$$f(v) = u \wedge v$$

1. Montrer que $f$ est linéaire. Déterminer ses éléments propres.
2. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**Exercice 5.**
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.
1. Donner le domaine de définition $D_f$ de $f$.
2. Monter que $f$ vérifie une équation différentielle.

**Exercice 6.**
1. Soit $\alpha$ réel. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $1 + 2\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \cos(n\alpha)x^n$.
2. En déduire le développement en série de Fourier de $\alpha \to \dfrac{1}{2 - \cos\alpha}$.

**Exercice 7.**
Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On pose $p_k = P(X = k)$ et $Q(X) = E(t^X)$.
On suppose que $Q$ admet $n$ racines réelles. Monter que $X$ s'écrit comme la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli.