ÉCOLE DES PONTS PARIS TECH
RAPPORT ORAL DE MATHÉMATIQUES
Concours Admission Sur Titre. L3
Année 2021

Déroulement de l'épreuve

L'oral de mathématiques se déroule en deux temps :
• dans un premier temps, il est proposé un exercice en préparation de 15 minutes environ dans la salle d'interrogation ; il s'agit de ss'approprier, voire de résoudre l'exercice proposé et qui porte sur une large partie du programme de mathématiques du concours (algèbre, analyse, probabilités),
• dans un second temps, le candidat passe au tableau durant 30 minutes environ, temps pendant lequel il expose d'abord au jury son travail produit pendant la préparation. Ensuite, il lui est proposé de résoudre directement au tableau un second exercice portant sur une partie du programme différente du premier exercice.

L'école des Ponts recrute des étudiants ayant un niveau L3 dans leur spécialité (maths ou physique) et un niveau L2 dans la spécialité complémentaire. Les questions posées sont de niveau L2 dans les deux spécialités ; certaines questions peuvent mettre en œuvre des connaissances de niveau L3.

Objet de l'épreuve

Cet oral consiste en un dialogue entre le candidat et l'examinateur. Le rôle de ce dernier est d'évaluer les connaissances et les capacités mathématiques du candidat, et en aucune façon d'essayer de lui donner un cours. Le but de cet oral n'est pas de résoudre en totalité les exercices proposés, mais de tester les connaissances et l'esprit d'initiative de chaque candidat.

Afin de juger de la performance des impétrants, l'examinateur prend en compte la compréhension du problème posé, les initiatives prises (cerner les difficultés, les nommer, donner des directions pour les surmonter, etc.), la capacité d'envisager différentes méthodes et à réfléchir à leurs utilisations, la connaissance précise du cours, l'autonomie du candidat ainsi que la rigueur et la qualité de l'expression orale.

Remarques plus techniques

Lors des oraux précédents, on constate principalement le manque d'autonomie des candidats. Le temps de préparation doit servir à dégager des idées (les plus précises possibles) qui permettront d'avancer lors du passage au tableau. De trop nombreux candidats se contentent d'exposer une vague idée puis se retournent vers l'examinateur pour l'interroger sur la démarche à suivre.
En particulier, l'énoncé des théorèmes utilisés reste encore très souvent imprécis. Rappelons qu'un théorème est un ensemble d'hypothèses desquelles on déduit une conclusion : les hypothèses sont trop rarement vérifiées quand l'énoncé ne se réduit pas à une formule *magique*. Le raisonnement logique (condition nécessaire, condition suffisante, raisonnement par contraposée, par récurrence,...) est trop souvent insuffisant.

Rappelons enfin que ces épreuves orales du concours AST ont pour but d'admettre les candidats à l'École de Ponts et Chaussées ParisTech. Etre parmi les meilleurs de sa promotion ne suffira pas pour y réussir. L'oral de mathématiques est une épreuve particulière (connaissances, rapidité de la réflexion) qu'il faut préparer tout au long de l'année en résolvant de nombreux exercices sur chacun des chapitre du programme.

EXEMPLES D'EXERCICES PROPOSÉS LORS DES SESSIONS PRÉCÉDENTES

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = i(X-i)^{2n+1} - i(X+i)^{2n+1}$.
1. Déterminer le degré de P ainsi que son coefficient dominant et son coefficient libre.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tan(\frac{k\pi}{2n+1})$.

Exercice 2.
Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 3.
1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P(A) = 0$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

Exercice 4.
1. Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante vers 0. Soit (v_n) une suite complexe. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \leqslant M$.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ suivant les valeurs du rée θ.

Exercice 5.
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$.
1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 6.
1. Soit α réel. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle 1 + 2\sum_{n\geqslant 1} \cos(n\alpha)x^n$.
2. En déduire le développement en série de Fourier de $\alpha \to \dfrac{1}{2-\cos\alpha}$.

Exercice 7.
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$.
1. Déterminer une densité de $X_1 + X_2$ et la représenter graphiquement.
2. Déterminer, pour tout $n \geqslant 3$ une densité de $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et la représenter graphiquement.